Lista Nr 5

Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej

5.0.1 Obliczanie pochodnej funkcji

Pochodne funkcji podstawowych

1.	$f(x) = x^{\alpha}$	$f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}$
2.	$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x\,\ln a}$
2'.	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
3.	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x\,\ln a$
3'.	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
4.	$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
5.	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\,\sin x$
6.	$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
7.	$f(x) = \operatorname{Ctg} x$	$f'(x) = -\,\dfrac{1}{\sin^2 x}$
8.	$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9.	$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\,\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10.	$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
11.	$f(x) = \operatorname{arcCtg} x$	$f'(x) = -\,\dfrac{1}{1+x^2}$

Reguły różniczkowania

pochodna sumy (różnicy) dwóch funkcji

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

pochodna iloczynu dwóch funkcji

$$(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$$

pochodna ilorazu dwóch funkcji

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)} \qquad (g(x) \neq 0)$$

♦ **Wniosek**

Ponieważ $f(x) \equiv C = \text{const}$: $f'(x) = (C)' = 0$, więc:

$$(C\, g(x))' = C\, g'(x)$$

Pochodna funkcji złożonej

$$\boxed{(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x))\, \varphi'(x)}$$

Obliczyć pochodną funkcji:

1. $y = 3x^2 - 5x + 1$;
2. $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2}$;
3. $y = \dfrac{x}{x^2+1}$;
4. $y = \dfrac{1}{x^2+x+1}$;
5. $y = \dfrac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}$;
6. $y = (\sqrt{x}+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$;
7. $y = \dfrac{2}{(x^2-x+1)^2}$;
8. $y = \sqrt{1-x^2}$;
9. $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$;
10. $y = \sin x + \cos x$;
11. $y = \dfrac{x}{1-\cos x}$;
12. $y = \dfrac{x \sin x}{1 + \operatorname{tg} x}$;
13. $y = \cos^2 x$;
14. $y = \sin \dfrac{1}{x}$;
15. $y = \operatorname{Ctg} \sqrt[3]{1+x^2}$;
16. $y = \cos^2 \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$;
17. $y = \sin^2(\cos 3x)$;
18. $y = \sin\sqrt{1+x^2}$;
19. $y = x \arcsin x$;
20. $y = \sqrt{x} \operatorname{arctg} x$;
21. $y = x \cdot \sin x \cdot \operatorname{arctg} x$;
22. $y = \dfrac{\arccos x}{x}$;
23. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;
24. $y = \arccos \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$;
25. $y = \operatorname{arctg}^2 \dfrac{1}{x}$;
26. $y = \arcsin \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;
27. $y = \dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\arcsin\sqrt{x^2+2x}}$;
28. $y = \operatorname{arctg}\left(x - \sqrt{1+x^2}\right)$;
29. $y = \ln^2 x$;
30. $y = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$;
31. $y = \ln(x^2 - 4x)$;
32. $y = \ln \sin x$;
33. $y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}$;
34. $y = \dfrac{1}{3^x}$;
35. $y = e^x \cos x$;
36. $y = \dfrac{e^x}{\sin x}$;
37. $y = \dfrac{\cos x}{e^x}$;
38. $y = e^{-x}$;
49. $y = \sqrt{1+e^x}$;
40. $y = e^{\sqrt{1+x}}$;
41. $y = 3^{\sin x}$;
42. $y = xe^x(\cos x + \sin x)$;
43. $y = 2^{3^x}$;
44. $y = \operatorname{sh}^3 x$;
45. $y = \operatorname{ch}(\operatorname{sh} x)$;

46. $y = x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$;
47. $y = \operatorname{th}(\ln x)$;
48. $y = e^{\operatorname{ch}^2 x}$;
49. $y = (\sin x)^{\cos x}$;
50. $y = x^3 e^{x^2} \sin 2x$;
51. $y = x^{\ln x}$;
52. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}}$;
53. $y = e^{-x^2} \ln x$;
54. $y = \sin^2 x \sin x^2$;
55. $y = \ln \dfrac{x + \sqrt{1 - x^2}}{x}$;
56. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \sin 2x}}$;
57. $y = \dfrac{\arcsin 4x}{1 - 4x}$;
58. $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$;
59. $y = xe^{1 - \cos x}$;
60. $y = \ln \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1 + x}$;
61. $y = e^x \sin x \cos^3 x$;
62. $y = \dfrac{1}{\cos(x - \cos x)}$;
63. $y = \dfrac{e^{x^2}}{e^x + e^{-x}}$;
64. $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} - \operatorname{Ctg} x \, \ln(1 + \sin x) - x$;
65. $y = x^3 \operatorname{arctg} x^3$;
66. $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x^2}$;
67. $y = 10^{x \operatorname{tg} x}$;
68. $y = \dfrac{1}{\operatorname{arctg} e^{-2x}}$;
69. $y = \dfrac{\ln \sin x}{\ln \cos x}$.

Zakładając, że funkcje f i g mają pochodne właściwe na wspólnym przedziale, obliczyć pochodne podanych funkcji:

1. $y = f(x) \cos g(x)$;
2. $y = \operatorname{arctg} f(x) g(x)$;
3. $y = e^{\frac{f(x)}{g(x)}}$;
4. $y = \ln\left(f(x)^{g(x)} + 1\right)$;
5. $y = \sin f(x) g(x)$;
6. $y = (f(x))^{g(x)}$;
7. $y = \operatorname{tg} \dfrac{f(x)}{g(x)}$;
8. $y = f(x) \operatorname{arctg} g(x)$;
9. $y = \log_{f(x)} g(x)$;

5.0.2 Pochodna funkcji parametrycznej

Obliczyć y'_x funkcji parametrycznej w zadanych punktach:

$\begin{cases} x = t \ln t, \\ y = \dfrac{\ln t}{t}; \end{cases}$ w punkcie $t_0 = 1$;

$\begin{cases} x = t(t \cos t - 2 \sin t), \\ y = t(t \sin t + 2 \cos t); \end{cases}$ w punkcie $t_0 = \pi/4$;

$\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t; \end{cases}$ w punkcie $t_0 = \pi/6$;

$\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1 + t^2}, \\ y = \dfrac{3t^2}{1 + t^2}; \end{cases}$ w punkcie $t_0 = 2$.

5.0.3 Interpretacja pochodnej funkcji

5.0.3-1. Zależność drogi od czasu w ruchu prostoliniowym jednostajnie zmiennym wyraża się wzorem $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$, przy czym s_0, v_0 i a są to stałe. Obliczyć prędkość chwilową w tym ruchu.

5.0.3-2. Ruch drgający punktu można opisać wzorem $x = a \sin \omega t$, gdzie a i ω są to stałe. Obliczyć prędkość chwilową w tym ruchu dla $t = 0, \dfrac{\pi}{2\omega}, \dfrac{\pi}{\omega}, \dfrac{3\pi}{2\omega}, \dfrac{2\pi}{\omega}$. Sporządzić wykres funkcji $x = x(t)$ i jej pochodnej.

5.0.3-3 Jeżeli przez cewkę płynie prąd o natężeniu $i = i(t)$, to indukuje się w niej siła elektromotoryczna $e = e(t)$ wprost proporcjonalna do prędkości zmiany prądu: $e = L \dfrac{d\,i}{d\,t}$, gdzie L oznacza tzw. Współczynnik samoindukcji. Niech $i = I_m \sin \omega t$. Obliczyć $e(t)$, a następnie sporządzić wykresy funkcji $i = i(t)$ oraz $e = e(t)$.

5.0.4 Równanie stycznej

Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)$ w punkcie x_0, jeśli:

1. $f(x) = x^2 - 5x + 2, \ x_0 = -1$;
2. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3, \ x_0 = -2$;

3. $f(x)=\sqrt{x},\ x_0=4$; 4. $f(x)=\operatorname{tg}2x,\ x_0=0$;
5. $f(x)=\ln x,\ x_0=1$; 6. $f(x)=e^{1-x^2},\ x_0=-1$.

Napisać równania stycznej i normalnej do linii o równaniu parametrycznym w danym punkcie t_0:

1. $\begin{cases} x=2e^t, \\ y=e^{-t}, \end{cases}$ gdzie $t_0=0$;
2. $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos 2t, \end{cases}$ gdzie $t_0=\dfrac{\pi}{6}$;
3. $\begin{cases} x=2\ln \operatorname{Ctg} t+1, \\ y=\operatorname{tg} t+\operatorname{Ctg} t, \end{cases}$ gdzie $t_0=\dfrac{\pi}{4}$;
4. $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^2}, \end{cases}$ gdzie $t_0=2$;
5. $\begin{cases} x=t(t\cos t-2\sin t), \\ y=t(t\sin t+2\cos t), \end{cases}$ gdzie $t_0=\dfrac{\pi}{4}$;
6. $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=a^t, \end{cases}$ gdzie $t_0=0$.

5.0.5 Różniczka funkcji

Obliczyć różniczkę funkcji:

1. $y=\dfrac{1}{x}$;
2. $y=\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}\quad (a\neq 0)$;
3. $y=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$;
4. $y=\ln|x+\sqrt{x^2+a}|$;
5. $y=\arcsin\dfrac{x}{a}$;
6. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Zakładając, że funkcje u, v, w są różniczkowalne we wspólnym przedziale, obliczyć różniczki funkcji:

1. $y=u\,v\,w$;
2. $y=\dfrac{u}{v^2}$;
3. $y=\ln\sqrt{u^2+v^2}$;
4. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$.

Zastępując przyrost funkcji różniczką obliczyć w przybliżeniu:

1. $\sqrt[3]{1,02}$; 2. $\sin 29^o$; 3. $\cos 151^o$;
4. $\operatorname{arctg} 1,05$; 5. $\lg 11$; 6. $e^{1,1}$
7. $\sin 3^o$; 8. $\ln 1,05$; 9. $\sqrt[3]{1,1}$.

5.0.6 Pochodne rzędów wyższych

Obliczyć pochodne rzędu drugiego danych funkcji:

1. $y=xe^{x^2}$;
2. $y=\dfrac{1}{1+x^3}$;
3. $y=(1+x^2)\operatorname{arctg}x$;
4. $y=\sqrt{a^2-x^2}$;
5. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;
6. $y=\dfrac{1}{a+\sqrt{x}}$;
7. $y=e^{\sqrt{x}}$;
8. $y=\sqrt{1-x^2}\arcsin x$;
9. $y=\arcsin a\sin x$.

Obliczyć pochodne rzędu n funkcji:

1. $y=e^{ax}$;
2. $y=e^{-x}$;
3. $y=\sin ax+\cos bx$;
4. $y=\sin^2 x$;
5. $y=x\,e^x$;
6. $y=x\,\ln x$;
7. $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$;
8. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$;
9. $y=\log_a x$.

Dowieść, że funkcja y jest rozwiązaniem równania różniczkowego, jeśli

1. $y''-2y'+2y=0$ gdzie $y=e^x\sin x$;
2. $2y'^2=(y-1)y''$ gdzie $y=\dfrac{x-3}{x+4}$;
3. $y^3y''+1=0$ gdzie $y=\sqrt{2x-x^2}$;
4. $y'''-13y'-12y=0$ gdzie $y=e^{4x}+2e^{-x}$;
5. $xy''+\dfrac{1}{2}y'-\dfrac{1}{4}y=0$ gdzie $y=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$;
6. $y''-y'+ye^{2x}=0$ gdzie $y=\cos e^x+\sin e^x$.

Obliczyć pochodne rzędu drugiego $\frac{d^2y}{dx^2}$ funkcji określonych parametrycznie:

$$1.\ \begin{cases} x = at^2, \\ y = bt^3, \end{cases} \qquad 2.\ \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \qquad 3.\ \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$$

$$4.\ \begin{cases} x = a(\varphi - \sin\varphi), \\ y = a(1 - \cos\varphi), \end{cases} \qquad 5.\ \begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \qquad 6.\ \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1 - t^2). \end{cases}$$

Obliczyć d^2y, jeśli:

$$1.\ y = \sqrt[3]{x^2}; \quad 2.\ y = x^m; \quad 3.\ y = (x+1)^3(x-1)^2;$$
$$4.\ y = 4^{-x^2}; \quad 5.\ y = \sqrt{\ln^2 x - 4}, \quad 6.\ y = \sin^2 x.$$

Zadania dodatkowe z podręczników i zbiorów zadań

Krysicki W., Włodarski L. *Analiza matematyczna w zadaniach. Część I.* – Warszawa. PWN – 1993. **Zadania 6.45 – 6.200 (str 113-117); 6.226-6.256 (str. 122-123).**

Gewert M., Skoczylas Z. *Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania.* – Wrocław. GiS – 2008. **Zadanie 4.10 (str.143); 4.12 (str.144); 4.16 (str.145); 4.19 (str.146)**.