Lista Nr 2

Ciąg liczbowy nieskończony. Granica ciągu

2.1 Napisać pierwsze pięć wyrazów ciągu:

2.1.1) $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$; 2.1.2) $u_n = n\,(1-(-1)^n)$; 2.1.3) $u_n = \frac{3n+5}{2n-3}$; 2.1.4) $u_n = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.2 Napisać wzór na wyraz ogólny ciągu:

2.2.1) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$; 2.2.2) $0, 2, 0, 2, \ldots$;

2.2.3) $2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \ldots$; 2.2.4) $1, 0, -3, 0, 5, 0, -7, \ldots$;

2.2.5) $-3, \frac{5}{3}, -\frac{7}{5}, \frac{9}{7}, -\frac{11}{9}, \ldots$; 2.2.6) $0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \ldots$.

2.3 Znaleźć największy (najmniejszy) wyraz ograniczonego z góry (z dołu) ciągu $\{u_n\}$

2.3.1) $u_n = 6n - n^2 - 5$; 2.3.2) $u_n = e^{10n-n^2-24}$; 2.3.3) $u_n = \frac{\sqrt{n}}{9+n}$;

2.3.4) $u_n = 2n + \frac{512}{n^2}$; 2.3.5) $u_n = 3n^2 - 10n - 14$; 2.3.6) $u_n = -\frac{n^2}{2^n}$.

2.4 Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

2.4.1) $u_n = \frac{n}{n+1}$; 2.4.2) $u_n = \frac{4n-3}{6-5n}$; 2.4.3) $u_n = \frac{n^2-1}{3-n^3}$;

2.4.4) $u_n = \frac{2n^3-4n-1}{6n+3n^2-n^3}$; 2.4.5) $u_n = \frac{(n-1)(n+3)}{3n^2+5}$; 2.4.6) $u_n = \frac{(2n-1)^2}{(4n-1)(3n+2)}$;

2.4.7) $u_n = \frac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)}$; 2.4.8) $u_n = \left(\frac{2n-3}{3n+1}\right)^2$; 2.4.9) $u_n = \frac{(\sqrt{n}+3)^2}{n+1}$;

2.4.10) $u_n = \frac{(-0.8)^n}{2n-5}$; 2.4.11) $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{n}$; 2.4.12) $u_n = \frac{\sqrt{1+2n^2}-\sqrt{1+4n^2}}{n}$;

2.4.13) $u_n = \frac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2}$; 2.4.14) $u_n = \frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}}$; 2.4.15) $u_n = \frac{n}{\sqrt[3]{8n^3-n}-n}$;

2.4.16) $u_n = \sqrt{n+2}-\sqrt{n}$; 2.4.17) $u_n = \sqrt{n^2+n}-n$; 2.4.18) $u_n = \sqrt{3n^2+2n-5}-n\sqrt{3}$;

2.4.19) $u_n = \frac{4^{n-1}-5}{2^{2n}-7}$; 2.4.20) $u_n = \frac{3\cdot 2^{2n+2}-10}{5\cdot 4^{-1}+3}$; 2.4.21) $u_n = \frac{2^{n+1}-3^{n+2}}{3^{n-1}}$.

2.5 Opierając się na twierdzeniu o trzech ciągach obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

2.5.1) $u_n = \sqrt[n]{2^n + 5^n}$; 2.5.2) $u_n = \sqrt[n]{3^n = 5^n + 7^n}$; 2.5.3) $u_n = \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}$.

2.6 Opierając się na twierdzeniu o granice ciągu monotonicznego (liczba e) obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

2.6.1) $u_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$; 2.6.2) $u_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$; 2.6.3) $u_n = \left(\frac{n+4}{n}\right)^n$;

2.6.4) $u_n = \left(1 - \frac{5}{n}\right)^{-n+2}$; 2.6.5) $u_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2}$; 2.6.6) $u_n = \left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{n-4}$.

2.7 Stosując odpowiednie metody obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

2.7.1) $u_n = \dfrac{\sqrt[4]{n^5+2} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2} - \sqrt{n^3+1}}$; 2.7.2) $u_n = n\left(\sqrt{2n^2+1} - \sqrt{2n^2-1}\right)$; 2.7.3) $u_n = \dfrac{9^{\log_3 n}}{4^{\log_2 n}}$;

2.7.4) $u_n = n\left(\ln(n+1) - \ln n\right)$; 2.7.5) $u_n = \dfrac{\log_2 n^5}{\log_8 n}$; 2.7.6) $u_n = \sqrt{n\left(n - \sqrt{n^2-1}\right)}$;

2.7.7) $u_n = \dfrac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}$; 2.7.8) $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$; 2.7.9) $u_n = \dfrac{n!}{(n+1)! - n!}$;

2.7.10) $u_n = \dfrac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 + (3+n)^2}$; 2.7.11) $u_n = \dfrac{(1+2n)^3 - 8n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2}$; 2.7.12) $u_n = \dfrac{(n+1)^3 + (n+2)^3}{(n+4)^3 + (n+5)^3}$;

2.7.13) $u_n = \dfrac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$; 2.7.14) $u_n = \dfrac{n\sqrt[3]{5n^2} + \sqrt[4]{9n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}$; 2.7.15) $u_n = \dfrac{(n+2)^3 + (n-2)^3}{n^4 + 2n^2 - 1}$;

2.7.16) $u_n = \dfrac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3} + \sqrt[4]{n^5+1}}$; 2.7.17) $u_n = n(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1})$; 2.7.18) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+2} - \sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt[7]{n+2} - \sqrt[5]{n^5+2}}$;

2.7.19) $u_n = \dfrac{\sqrt[3]{n} - 9n^2}{3n - \sqrt[4]{9n^8+1}}$; 2.7.20) $u_n = n(\sqrt{n(n-2)} - \sqrt{n^2-3})$; 2.7.21) $u_n = \sqrt{n^2-3n+2} - n$;

2.7.22) $u_n = n - \sqrt{n(n-1)}$; 2.7.23) $u_n = n\sqrt{n} - \sqrt{n(n+1)(n+2)}$; 2.7.24) $u_n = \dfrac{3^n - 2^n}{3^{n-1} + 2^n}$;

2.7.25) $u_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{n-n^2+3}$; 2.7.26) $u_n = \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$; 2.7.27) $u_n = \left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$;

2.7.28) $u_n = \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n}}$;

2.7.29) $u_n = \dfrac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2}$;

2.7.30) $u_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1) \cdot n}$;

2.7.31) $u_n = \dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$.