

---

## Lista Nr 8

# Całka oznaczona. Zastosowanie całek oznaczonych

### 8.1 Całka oznaczona

Obliczyć całkę oznaczoną:

1.  $\int_3^5 \frac{x dx}{x^2 - 4}$ ;
2.  $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11 + 5x)^2}$ ;
3.  $\int_0^1 \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2}$ ;
4.  $\int_0^1 \sqrt{1 + x} dx$ ;
5.  $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$ ;
6.  $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}$ ;
7.  $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$ ;
8.  $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x dx}{\sin^2 x}$ ;
9.  $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x dx$ ;
10.  $\int_1^2 \frac{dx}{x + x^3}$ ;
11.  $\int_0^{e-1} \ln(x + 1) dx$ ;
12.  $\int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} - 1}$ ;
13.  $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx$ ;
14.  $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1 + x}}$ ;
15.  $\int_1^3 \frac{dx}{x + 2x^2}$ ;
16.  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ ;
17.  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ ;
18.  $\int_0^3 \frac{dx}{e^{x/3}}$ ;
19.  $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x dx$ .

### 8.2 Pole obszaru

Obliczyć pole obszaru, ograniczonego liniami:

1.  $y = (x - 2)^3$ ,  $y = 4x - 8$ .
2.  $y = 4 - x^2$ ,  $y = x^2 - 2x$ .
3.  $y = \sqrt{4 - x^2}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ .
4.  $y = \cos x \sin^2 x$ ,  $y = 0$  ( $0 \leq x \leq \pi/2$ ).
5.  $y = \frac{1}{x\sqrt{1 + \ln x}}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = e^3$ .

6.  $y = (x + 1)^2$ ,  $y^2 = x + 1$ .
7.  $y = x\sqrt{36 - x^2}$ ,  $y = 0$ ,  $(0 \leq x \leq 6)$ .
8.  $y = x \operatorname{arctg} x$ ,  $y = 0$ ,  $x = \sqrt{3}$ .
9.  $y = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ .
10.  $y = 2x - x^2 + 3$ ,  $y = x^2 - 4x + 3$ .
11.  $3x + 2y - 12 = 0$ ,  
 $y = x + 1$ ,  $y = 0$ ;
12.  $x - 4y + 2$ ,  
 $y = -x + 3$ ,  $y = 0$ ;
13.  $y = 3x - 1$ ,  $y = 0$ ,  
 $x = 2$ ,  $x = 4$ ;
14.  $y = x^2 - x - 6$ ,  
 $y = -x^2 + 5x + 14$ ;
15.  $4x^2 - 9y + 18 = 0$ ,  
 $2x^2 - 9x + 36 = 0$ ;
16.  $y^2 = 8x$ ,  
 $2x - 3y + 8 = 0$ ;

1. Obliczyć pole obszaru zawartego między wykresem funkcji  $y = e^x$ , prostą o równaniu  $x = 1$  i osią  $OX$ .
2. Obliczyć pole obszaru zawartego między wykresem funkcji  $y = \frac{1}{x^3}$ , prostą  $x = 1$ , osią  $OX$  i osią  $OY$ .
3. Czy pole obszaru, zawartego między wykresami funkcji  $y = 2^x$ ,  $y = \frac{1}{x - \frac{1}{2}}$  i osią  $OX$ , jest skończone?
4. Obliczyć pole obszaru zawartego między wykresami funkcji  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ,  $y = \frac{x}{2}$  i osią  $OX$ .

1. Obliczyć pole obszaru ograniczonego liniami:  $y = \arcsin x$ ,  $x = 0$ ,  $y = \frac{\pi}{2}$ .
2. Obliczyć pole ograniczone pętlą linii  $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$
3. Obliczyć długość łuku linii łańcuchowej  $y = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x$  w przedziale od  $x = 0$  do  $x = 3$ .
4. Obliczyć objętość bryły utworzonej przez obrót dookoła osi  $Ox$  obszaru ograniczonego liniami  $y^2 = 2px$ ,  $x = h$ .

### 8.3 Długość łuku krzywej

Obliczyć długość łuku krzywej:

1.  $y = \ln x$ ,  $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}$ .
2.  $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$ ,  $1 \leq x \leq 2$ .
3.  $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$ ,  $0 \leq x \leq 7/9$ .
4.  $y = e^x + 26$ ,  $\ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{24}$ .
5.  $y = 1 - \ln(x^2 - 1)$ ,  $3 \leq x \leq 4$ ;
6.  $y = 2 + \cosh x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ;

$$7. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \\ 0 \leq t \leq \pi; \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \\ 0 \leq t \leq \pi; \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x = 8(\cos t + t \sin t), \\ y = 8(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi/4; \end{cases}$$

$$10. r = 3e^{3\varphi/4}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2;$$

$$11. r = 3(1 + \sin \varphi), \quad -\pi/6 \leq \varphi \leq 0;$$

$$12. r = 4\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 3/4.$$

## 8.4 Objętość bryły obrotowej

Obliczyć objętość bryły obrotowej utworzonej przez obrót dookoła osi  $oX$  obszaru ograniczonej liniami:

1.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, y = \pm b.$
2.  $xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0.$
3.  $y = 3 \sin x, y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi.$
4.  $y = xe^x, y = 0, x = 1.$
5.  $y = 2x - x^2, y = -x + 2.$
6.  $y = x^3, y^2 - x = 0.$
7.  $y = -x^2 + 5x - 6, y = 0.$
8.  $y = 5 \cos x, y = \cos x, x = 0, x \geq 0.$
9.  $y = xe^x, x = \pi/2, y = 0.$
10.  $y = x^2, y^2 - x = 0.$
11.  $y = \sin(\pi x/2), y = x^2.$
12.  $y = 2x - x^2, y = -x + 2, x = 0.$

## 8.5 Pole powierzchni bocznej

Obliczyć pole bryły obrotowej powstałej przez obrót dookoła osi  $oX$  linii:

1.  $3y - x^3 = 0 \quad (0 \leq x \leq a).$
2.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (-a \leq x \leq a, a > 0).$
3.  $y = \operatorname{tg} x \quad (0 \leq x \leq \pi/4).$
4.  $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t \quad (0 \leq t \leq \pi/2); \end{cases}$
5.  $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq \pi/2); \end{cases}$
6.  $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi). \end{cases}$

## 8.6 Całka niewłaściwa

Obliczyć całkę niewłaściwą:

$$\begin{array}{llll} 1. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}; & 2. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x}; & 3. \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}; & 4. \int_0^{+\infty} e^{-x} dx; \\ 5. \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx; & 6. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}; & 7. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}}; & 8. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}; \\ 9. \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}; & 10. \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}; & 11. \int_1^e \frac{dx}{x \ln x}; & 12. \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx. \\ 13. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}; & 14. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}; & 15. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 11}; & 16. \int_0^{+\infty} e^{-2x} \cos x dx; \\ 17. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4}; & 18. \int_1^{+\infty} \frac{(1+2x) dx}{x^2(1+x)}; & 19. \int_2^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2+5)^3}}; & 20. \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx; \end{array}$$