Lista zadań Nr 3

Funkcja wielu zmiennych. Funkcja uwikłana

3.1 Podstawowe własności

3.1.1 Dziedzina funkcji

Znaleźć dziedzinę funkcji:

1. $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$; 2. $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$; 3. $z = \ln xy$;
4. $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$; 5. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+y}}$; 6. $z = \arcsin \dfrac{y-1}{x}$;
7. $z = \mathrm{arctg}(x - \ln y)$; 8. $z = \dfrac{xy}{x+y}$; 9. $z = x^2 \cos(x+y)$.

3.1.2 Warstwica wykresu funkcji dwóch zmiennych

Naszkicować warstwicy funkcji $z = f(x, y)$

1. $z = xy$; 2. $z = x^2y + x$;
3. $z = y(x^2+1)$; 4. $z = \dfrac{xy-1}{x^2}$.

3.2 Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych

3.2.1 Pochodne cząstkowe

Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu pierwszego funkcji:

1. $z = \frac{u}{v} + \frac{v}{u}$; 2. $z = (5x^2y - y^3 + 7)^3$; 3. $z = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$;
4. $z = \dfrac{1}{\arctan \frac{y}{x}}$; 5. $z = \ln(x^2+y^2)$; 6. $z = \arcsin \dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$;
7. $z = x^3y - y^3x$; 8. $z = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$; 9. $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$;
10. $z = \arctan \dfrac{x}{y}$; 11. $z = x^{y^2}$; 12. $z = \ln \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$;
13. $u = \arctan \dfrac{v+w}{v-w}$; 14. $u = xyz$; 15. $u = \sin(x^2+y^2+z^2)$;
16. $z = (1 + \log_y x)^2$; 17. $u = (\sin x)^{yz}$; 18. $u = \dfrac{\cos(\varphi - 2\psi)}{\cos(\varphi + 2\psi)}$.

3.2.2 Pochodne cząstkowe rzędów wyższych

I. Obliczyć $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$:

1. $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$; 2. $z = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$;
3. $z = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$; 4. $z = \sin^2(ax+by)$;
5. $z = e^{xe^y}$; 6. $z = \frac{x-y}{x+y}$;
7. $z = y^{\ln x}$; 8. $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2-2xz}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} =?$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} =?$

II. Dowieźć że funkcja $u = u(x,\, y)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego cząstkowego:

1. $u(x,\, y) = \ln(e^x + e^y)$: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1$; 2. $u(x,\, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;
3. $u(x,\, y) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; 4. $u(x,\, y) = \varphi(x-at) + \psi(x+at)$: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

3.2.3 Różniczka zupełna rzędu pierwszego funkcji dwóch zmiennych

Obliczyć różniczkę zupełną funkcji:

1. $z = x^2y^4 - x^3y^3 + x^4y^2$; 2. $z = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$
3. $z = \frac{x+y}{x-y}$; 4. $z = \arcsin \frac{x}{y}$;
5. $z = \sin(xy)$; 6. $z = \mathrm{arctg}\, \frac{x+y}{1-xy}$;
7. $z = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$; 8. $z = \mathrm{arctg}\,(xy)$.

3.2.4 Różniczka zupełna rzędu drugiego funkcji dwóch zmiennych

Obliczyć różniczkę zupełną rzędu drugiego funkcji $f(x,\, y)$:

1. $f(x,\, y) = xy^2 - x^2y$; 2. $f(x,\, y) = \ln(x-y)$;
3. $f(x,\, y) = \frac{1}{2(x^2+y^2)}$; 4. $f(x,\, y) = x \sin^2 y$;
5. $f(x,\, y) = e^{xy}$; 6. $f(x,\, y,\, z) = xyz$;
7. $f(x,\, y) = \sin(2x+y)$; 8. $f(x,\, y) = \sin(x+y+z)$.

3.2.5 Pochodne funkcji złożonej

Obliczyć pochodne funkcji złożonej:

1. $u = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$, $\frac{du}{dt} =?$
2. $u = z^2 + y^2 + zy$, $z = \sin t$, $y = e^t$, $\frac{du}{dt} =?$
3. $z = \arcsin(x-y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$, $\frac{du}{dt} =?$
4. $z = x^2y - y^2x$, $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $\frac{\partial z}{\partial u} =?$, $\frac{\partial z}{\partial v} =?$
5. $z = x^2 \ln y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$, $\frac{\partial z}{\partial u} =?$, $\frac{\partial z}{\partial v} =?$
6. $u = \ln(e^x + e^y)$, $\frac{\partial u}{\partial x} =?$ Obliczyć $\frac{du}{dx}$, jeżeli $y = x^3$;
7. $u = \arcsin \frac{x}{z}$, gdzie $z = \sqrt{x^2+1}$; $\frac{du}{dx} =?$
8. $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, $y = a \sin x$, $z = \cos x$; $\frac{du}{dx} =?$

3.2.6 Gradient pola skalarnego. Pochodna kierunkowa.

1. $z = 4 - x^2 - y^2$. Wyznaczyć $\operatorname{grad} z$ w punkcie $A = (1; 2)$.

2. $z = \arctan \dfrac{y}{x}$. Wyznaczyć $\operatorname{grad} z$: 1) w dowolnym punkcie prostej $y = x$; 2) w dowolnym punkcie prostej $y = -x$.

3. Wyznaczyć pochodną funkcji $u = \ln(e^x + e^y)$ w kierunku dwusiecznej kąta układu współrzędnych.

4. Obliczyć pochodną funkcji $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ w punkcie $(a; b; c)$ w kierunku wektora wodzącego tego punktu.

5. Znaleźć pochodną kierunkową pola skalarnego $u(x, y, z)$ w punkcie M w kierunku wektora $\vec{l}$: $u = x^2y - \sqrt{xy + z^2}$, $\vec{l} = 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $M(1, 5, -2)$.

6. Znaleźć pochodną kierunkową funkcji w podanym kierunku i punkcie:

   (a) $f(x,\, y) = x^2 - xy - 2y^2 + 1$ w kierunku [1, 2] oraz punkcie (1, 2);
   (b) $f(x,\, y) = x^2 - 2x^2y + xy^2$ w kierunku [3, 4] oraz punkcie (1, 2);
   (c) $f(x,\, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ w kierunku [5, 12] oraz punkcie (1, 1);
   (d) $f(x,\, y) = ye^{x+y}$ w kierunku [4, −3] oraz punkcie $(-2, 2)$.

Znaleźć kąt między gradientami pól skalarnych $u(x, y, z)$ i $v(x, y, z)$ w punkcie M:

1. $v = \dfrac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$, $u = \dfrac{yz^2}{x^2}$, $M\left(\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

2. $v = \dfrac{4\sqrt{6}}{x} - \dfrac{\sqrt{6}}{9y} + \dfrac{3}{z}$, $u = x^2yz^3$, $M\left(2, \dfrac{1}{3}, \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$;

3. $v = 9\sqrt{2}x^3 - \dfrac{y^3}{2\sqrt{2}} - \dfrac{4z^3}{\sqrt{3}}$, $u = \dfrac{z^3}{xy^2}$, $M\left(\dfrac{1}{3}, 2, \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$;

4. $v = 3\sqrt{2}x^2 - \dfrac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2$, $u = \dfrac{z^2}{xy^2}$, $M\left(\dfrac{1}{3}, 2, \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$;

Znaleźć pochodną kierunkową pola skalarnego $u(x, y, z)$ w punkcie M w kierunku wektora $\vec{l}$:

1. $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$, $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $M(1, 1, 1)$;

2. $u = x^2y - \sqrt{xy + z^2}$, $\vec{l} = 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $M(1, 5, -2)$;

3. $u = \sin(x + 2y) + \sqrt{xyz}$, $\vec{l} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$, $M(\pi/2, 3\pi/2, 3)$;

4. $u = x(\ln y - \operatorname{arctg} z)$, $\vec{l} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$, $M(-2, 1, -1)$.

3.2.7 Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Wyznaczyć punkty stacjonarne funkcji:

1. $f(x,\, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$;

2. $f(x,\, y) = 3x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 2y$;

3. $f(x,\, y) = x^3 + y^3 + 3xy$;

4. $f(x,\, y) = x^3 + 3xy - y^3$;

5. $f(x,\, y) = 2xy - x^2 - 2y^3 - 4y^2$;

6. $f(x,\, y) = x^4 + y^3 + 32x - 9y$;

7. $f(x,\, y) = 2x^2 + 8xy + \ln y$;

8. $f(x,\, y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{8}{y}$;

9. $f(x,\, y) = yx^2 + y^3 - 4x^2$;

10. $f(x,\, y) = 8xy - 4y^4$;
11. $f(x,\, y) = 2x^3y + 2x^3 + 3x^2 + y^2 + 2y$;
12. $f(x,\, y) = y^3 + 12x^2 + 3y^2 - 12xy - 12x + 3y$;
13. $f(x,\, y) = e^{2x-y}(2x^2 - y^2)$;
14. $f(x,\, y) = 2x\sqrt{y} - x^2 - 2y + 3x$.

Wyznaczyć ekstrema funkcji:

1. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$;
2. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$;
3. $z = x^2 + 8y^3 - 6xy + 1$;
4. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$;
5. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$;
6. $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$;
7. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 29$;
8. $z = 3x^2y(4 - x + y)$;
9. $z = 6xy - x^3 - y^3 + 3$;
10. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6xy$;
11. $u = 3xz + xy + z^2 + 2x$;
12. $u = x^3 - 3x + y^2 + 2y + z^2$;

Wyznaczyć globalne ekstrema warunkowe funkcji:

1. $f(x,\, y) = xy$ przy warunku $x^2 + y^2 = 8$;
2. $f(x,\, y) = y^2 - x^2$ przy warunku $\dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1$;
3. $f(x,\, y) = x^2 + 2xy + 4y^2$ przy warunku $x + 2y = 2$;
4. $f(x,\, y) = 8x + 5y$ przy warunku $xy = 10$;
5. $f(x,\, y) = 2x - y$ przy warunku $y^2 = x$ dla $x \le 1$;
6. $f(x,\, y) = x^2 + 4xy + y^2$ przy warunku $x - y = 6$;
7. $f(x,\, y) = x^2 + 2y^2 + 12xy$ przy warunku $4x^2 + y^2 = 25$;

3.3 Funkcja uwikłana

Obliczyć $\dfrac{dy}{dx}$ i $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ funkcji uwikłanych:

1. $x^2e^{2y} - y^2e^{2x} = 0$;
2. $y \sin x - \cos(x - y) = 0$;
3. $x + y = e^{x-y}$;
4. $x - y + \arctan y = 0$;
5. $x^3 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$.