Lista zadań Nr 4

Rachunek całkowy funkcji wielu zmiennych

4.1 Całka podwójna. Obliczanie

4.1.1 Całka iterowana

Zapisać całkę iterowaną dla całki podwójnej $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$ w danym obszarze Ω:

1. równoległobok o bokach: $x = 3$, $x = 5$, $3x - 2y + 4 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$;
2. trójkąt o bokach: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$;
3. $x^2 + y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$;
4. $x + y \le 1$, $x - y \le 1$, $x \ge 0$;
5. $y - 2x \le 0$, $2y - x \ge 0$, $xy \le 2$.

4.1.2 Zmiana kolejności całkowania

Zmienić kolejność całkowania:

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx.$
2. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy.$
3. $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_{-\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}} f(x,y)\,dy.$

4.1.3 Całka podwójna w prostokącie

Obliczyć całkę podwójną w prostokącie Ω:

1. $\iint\limits_{\Omega} ye^{\frac{xy}{2}}\,dx\,dy,\quad \Omega:\ y = \ln 2,\ y = \ln 3,\ x = 2,\ x = 4.$
2. $\iint\limits_{\Omega} y\cos xy\,dx\,dy,\quad \Omega:\ y = \frac{\pi}{2},\ y = \pi,\ x = 1,\ x = 2.$
3. $\iint\limits_{\Omega} \frac{x^2 + y^2}{4}\,dx\,dy,\quad \Omega:\ 1 \le x \le 3,\ 1 \le y \le 3.$

4. $\iint\limits_{\Omega} (2x^2 - y\,x)\,dx\,dy, \quad \Omega:\ 1 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 1.$

5. $\iint\limits_{\Omega} xy^3\,dx\,dy, \quad \Omega:\ 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2.$

6. $\iint\limits_{\Omega} (6 - x^2 - y^2)\,dx\,dy, \quad \Omega:\ -1 \le x \le 1, \quad -2 \le y \le 2.$

7. $\iint\limits_{\Omega} xy(x-y)\,dx\,dy, \quad \Omega:\ 0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b.$

8. $\iint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{1+y^2}\,dx\,dy, \quad \Omega:\ 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1.$

4.1.4 Całka podwójna w obszarze

Obliczyć całkę podwójną w obszarze Ω ograniczonego liniami:

1. $\iint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy, \quad \Omega:\ x=2,\ y=x,\ xy=1.$

2. $\iint\limits_{\Omega} \cos(x+y)\,dx\,dy, \quad \Omega:\ x=0,\ y=\pi,\ y=x.$

3. $\iint\limits_{\Omega} (12x^2y^2 + 16x^3y^3)\,dx\,dy, \quad \Omega:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x};$

4. $\iint\limits_{\Omega} (36x^2y^2 - 96x^3y^3)\,dx\,dy, \quad \Omega:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3;$

5. $\iint\limits_{\Omega} y^2 \sin\frac{xy}{2}\,dx\,dy, \quad \Omega:\ x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=\frac{x}{2};$

4.1.5 Zamiana zmiennych w całce podwójnej

W danych całkach wprowadzić współrzędne biegunowe:

1. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\,dy.$

2. $\int\limits_{R/2}^{2R} dy \int\limits_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x,y)\,dx.$

3. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\,dy.$

4. $\int\limits_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}} dx \int\limits_0^{Rx} f(x,y)\,dy + \int\limits_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\,dy.$

Przechodząc do współrzędnych biegunowych obliczyć całki:

1. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dy.$

2. $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy,\quad \text{gdzie } \Omega:\ x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0.$

3. $\iint\limits_{\Omega} (h-2x-3y)\,dx\,dy,\quad \text{gdzie } \Omega:\ x^2+y^2\le R^2.$

4. $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy,\quad \text{gdzie } \Omega:\ x^2+y^2\le Rx.$

5. $\iint\limits_{\Omega} \arctan\dfrac{y}{x}\,dx\,dy,\quad \text{gdzie } \Omega:\ x^2+y^2\ge 1,\ x^2+y^2\le 9,\ y\ge \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y\le x\sqrt{3}.$

4.2 Zastosowanie całki podwójnej

4.2.1 Zastosowanie całki podwójnej mechanice

Znaleźć masę obszaru płaskiego Ω o gęstości powierzchniowej $\mu(x,y)$ ograniczonego danymi liniami (lub określonego nierównościami): $\Omega:\ x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ (y\ge 0);\ \mu(x,y)=7x^2+y.$

Znaleźć masę obszaru płaskiego Ω o gęstości powierzchniowej $\mu(x,y)$ ograniczonego danymi liniami (lub określonego nierównościami): $\Omega:\ \frac{x^2}{4}+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0;\ \mu(x,y)=6x^3y^3.$

Wyznaczyć środek ciężkości obszaru ograniczonego liniami: $y=0$ i jednąpołową fali sinusoidy $y=\sin x$.

Wyznaczyć środek ciężkości obszaru ograniczonego liniami: $y=x^2,\ x=4,\ y=0.$

Wyznaczyć środek ciężkości obszaru ograniczonego liniami: $y^2=ax\ y=x.$

4.2.2 Zastosowanie całki podwójnej geometrii

Objętość bryły

Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami:

1. $z=\sqrt{64-x^2-y^2},\ z=1,\ x^2+y^2=60$ (wewnątrz walca).
2. $z=x^2+y^2,\ x+y=4,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$
3. $z=x+y+a,\ y^2=ax,\ x=a,\ z=0,\ y=0$ (gdy $y>0$).
4. $z=a-x,\ y^2=ax,\ z=0.$
5. $z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0.$
6. $y^2+z^2=4ax,\ y^2=ax,\ x=3a,$ (na zewnątrz walca).

Pole obszaru

Posługując się całką podwójną obliczyć pole ograniczone liniami:

1. $xy=4,\ y=x,\ x=4.$
2. $y=x^2,\ 4y=x^2,\ y=4.$
3. $y=x^2,\ 4y=x^2,\ x=\pm 2.$
4. $y^2=4+x,\ x+3y=0.$
5. $y=\ln x,\ x-y=1,\ y=-1.$