# Lista zadań Nr 5

# Rachunek całkowy funkcji wielu zmiennych

## 5.1 Całka potrójna. Obliczanie

### 5.1.1 Całka potrójna w prostopadłościanie

Obliczyć całkę potrójną w prostopadłościanie $\Omega$:

1. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{5}(4x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 4y + 1)\, dx\, dy\, dz, \quad \Omega:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 3.$

2. $\iiint\limits_{\Omega} xy\, dx\, dy\, dz, \quad \Omega:\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c.$

3. $\iiint\limits_{\Omega} y^2 z \cos x\, dx\, dy\, dz, \quad \Omega:\ 0 \le x \le 2\pi,\ 0 \le y \le b,\ -\frac{a}{2} \le z \le \frac{a}{2}.$

4. $\int\limits_0^{2\pi} dt \int\limits_0^{a} dr \int\limits_0^{b} r^3\, dz.$

5. $\int\limits_0^{3} dx \int\limits_0^{1} dy \int\limits_0^{4} z^2\, dz.$

6. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a} d\rho \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho^3 \sin\varphi \cos\varphi\, dz.$

### 5.1.2 Całka potrójna w obszarze normalnym

Obliczyć całkę potrójną w obszarze $\Omega$ ograniczonego danymi powierzchniami:

1. $\iiint\limits_{\Omega} (15x + 30y)\, dx\, dy\, dz, \quad \Omega:\ z = x^2 + 3y^2,\ z = 0,\ y = x,\ y = 0,\ x = 1.$

2. $\iiint\limits_{\Omega} xyz\, dx\, dy\, dz, \quad \Omega:\ y = x,\ y = 0,\ x = 2,\ z = xy,\ z = 0.$

3. $\iiint\limits_{\Omega} x\, dx\, dy\, dz, \quad \Omega:\ x = 1,\ y = 10x,\ y = 0,\ z = xy,\ z = 0.$

4. $\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz, \quad \Omega:\ z = y^2 - x^2,\ z = 0, y = 1.$

5. $\iiint\limits_{\Omega} (x + y + z)\, dx\, dy\, dz, \quad \Omega:\ x + y + z = a,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

6. $\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dx\,dy\,dz, \quad \Omega: \quad y = x^2,\ x = y^2,\ z = xy,\ z = 0.$

7. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2\,dz.$

8. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz.$

9. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} x^3y^2z\,dz.$

### 5.1.3 Zamiana zmiennych w całce potrójnej

Dokonując zamianę zmiennych prostokątnych na sferyczne lub walcowe obliczyć całkę potrójną:

1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^a dz.$

2. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz.$

3. $\int\limits_{-R}^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} x^2+y^2\,dz.$

4. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz.$

## 5.2 Zastosowanie całki potrójnej

### 5.2.1 Zastosowanie całki potrójnej w geometrii

Znaleźć objętość bryły $\Omega$ ograniczonej powierzchniami:

1. $y = 16\sqrt{2x},\ y = \sqrt{2x},\ z = 0,\ x + z = 2.$

2. $x + y = 2,\ y = \sqrt{x},\ z = 12y,\ z = 0.$

3. $y = 5\sqrt{x},\ y = \frac{5x}{3},\ z = 0,\ z = 5 + \frac{5\sqrt{x}}{3}.$

4. $2z = x^2 + y^2,\ z = \sqrt{x^2+y^2}.$

5. $2z = 4 - x^2 - y^2,\ z = 2 - x - y,\ z = 0,\ y = 0,\ x = 0,$

6. $x^2 + y^2 = 9,\ x + y = 3,\ x + y = -3,\ x - y = 3,\ x - y = -3.$

7. Powierzchniami walcowymi $z = 4 - y^2$ i $z = y^2 + 2$ oraz płaszczyznami $x = -1$ i $x = 2$.

8. Paraboloidami $z = x^2 + y^2$ i $z = x^2 + 2y^2$ oraz płaszczyznami $y = x$, $4y = 2x$, $x = 1$.

### 5.2.2 Zastosowanie całki potrójnej technice

1. Znaleźć masę bryły $\Omega$ o gęstości objętościowej $\mu = 4z$ ograniczonej powierzchniami: $x^2+y^2+z^2 = 4$, $x^2+y^2 = 1$, $(x^2 + y^2 \leq 1)$, $x = 0$, $(x \geq 0)$.
2. Obliczyć masę kostki o długości krawędzi równej 2, jeżeli gęstość w każdym punkcie równa jest odległości punktu od podstawy kostki.
3. Gęstość bryły $\Omega = \{(x,\, y,\, z) :\ ; 1 \leq z \leq 5 - x^2 - y^2,\ \ x^2 + y^2 \geq 1\}$ w każdym punkcie jest wprost proporcjonalna do odległości tego punktu od płaszczyzny $Oxy$. Znaleźć masę oraz środek ciężkości.
4. Znaleźć masę bryły leżącej między koncentrycznymi sferami o promieniu 1 i 2 jeżeli gęstość jest proporcjonalna do kwadratu odległości do środka sfer. To samo dla gęstości proporcjonalnej do odległości od środka sfer.
5. Obliczyć współrzędne środka ciężkości bryły $\Omega$ określonej warunkami $y^2 \leq 4x$, $2x + y + z \leq 4$, $z \geq 0$ (przyjąć że gęstość objętościowa w każdym punkcie jest stała równa $\mu$).
6. Znaleźć środek ciężkości czworościanu ograniczonego płaszczyznami $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, jeżeli gęstość w każdym punkcie jest proporcjonalna do sumy jego współrzędnych.
7. Znaleźć środek ciężkości bryły ograniczonej powierzchniami $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

#### Pomocnicze wiadomości

Niech $\Omega$ będzie bryłą o zmiennej gęstości ciągłej $\rho(x,\, y,\, z)$. Następujące wielkości obliczamy według wzorów:

1) objętość bryły $\Omega$: $\displaystyle V = \iiint\limits_{\Omega} 1\, dx\, dy\, dz;$

2) masa bryły $\Omega$: $\displaystyle m = \iiint\limits_{\Omega} \rho(x,\, y,\, z)\, dx\, dy\, dz;$

3) momenty statyczne bryły $\Omega$ względem płaszczyzn układu współrzędnych:

3a) względem płaszczyzny $Oyz$: $\displaystyle M_{yz} = \iiint\limits_{\Omega} x \cdot \rho(x,\, y,\, z)\, dx\, dy\, dz;$

3b) względem płaszczyzny $Oxz$: $\displaystyle M_{xz} = \iiint\limits_{\Omega} y \cdot \rho(x,\, y,\, z)\, dx\, dy\, dz;$

3c) względem płaszczyzny $Oxy$: $\displaystyle M_{xy} = \iiint\limits_{\Omega} z \cdot \rho(x,\, y,\, z)\, dx\, dy\, dz;$

4) współrzędne środka ciężkości $(x_0,\, y_0,\, z_0)$ bryły $\Omega$:

$$x_0 = \frac{\iiint\limits_{\Omega} x \cdot \rho(x,\, y,\, z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint\limits_{\Omega} \rho(x,\, y,\, z)\, dx\, dy\, dz},\ y_0 = \frac{\iiint\limits_{\Omega} y \cdot \rho(x,\, y,\, z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint\limits_{\Omega} \rho(x,\, y,\, z)\, dx\, dy\, dz},\ z_0 = \frac{\iiint\limits_{\Omega} z \cdot \rho(x,\, y,\, z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint\limits_{\Omega} \rho(x,\, y,\, z)\, dx\, dy\, dz};$$