
Lista zadań Nr 6

Całka krzywoliniowa dwuwymiarowa

6.1 Całka krzywoliniowa nieskierowana

6.1.1 Obliczanie całki krzywoliniowej nieskierowanej

Obliczyć całkę krzywoliniową nieskierowaną:

1) $\int_L (x^2 + y^2) dl$, gdzie L jest okręgiem $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$.

2) $\int_L \frac{1}{3x + y} dl$, gdzie L jest odcinkiem o końcach $(0, 1)$, $(2, 0)$.

3) $\int_L e^{2x} dl$, gdzie L jest odcinkiem o końcach $(0, 1)$, $(1, 2)$.

4) $\int_L xy dl$, gdzie L jest częścią okręgu $x^2 + y^2 = 1$, spełniającą warunki $x \geq 0$, $y \geq 0$.

5) $\int_L y dl$, gdzie L jest łukiem cycloidy $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ dla $0 \leq t \leq 2\pi$.

6.1.2 Zastosowanie całki krzywoliniowej nieskierowanej

Obliczyć masę łuku o podanej funkcji gęstości:

1) łuku $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$, gdzie $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, o gęstości $x^2 y$ w punkcie (x, y) ;

2) łuku $x = 3t$, $y = t^3$, gdzie $0 \leq t \leq 1$, o gęstości $x^3 + y$ w punkcie (x, y) ;

3) okręgu $x = \frac{1}{2} \cos x$, $y = \frac{1}{2} \sin x$, gdzie $0 \leq t \leq 2\pi$, o gęstości $|x|$ w punkcie (x, y) ;

4) krzywej $y = x^2$, gdzie $0 \leq x \leq 1$, jeśli gęstość w punkcie (x, y) wynosi x ;

5) krzywej $y = 3 \ln x$, gdzie $3 \leq x \leq 4$, o gęstości x^2 w punkcie (x, y) ;

6) krzywej $y = \operatorname{ch} x$, gdzie $0 \leq x \leq 1$, jeżeli gęstość w punkcie (x, y) wynosi $\frac{1}{y}$;

7) krzywej $y^2 = \frac{2}{3}x$, gdzie $0 \leq x \leq \frac{7}{3}$, jeżeli gęstość w punkcie (x, y) wynosi y .

6.2 Całka krzywoliniowa skierowana

6.2.1 Obliczanie całki krzywoliniowej skierowanej

Obliczyć następujące całki krzywoliniowe skierowane:

- 1) $\int_L xy dx + (y - x) dy$, gdzie L jest okręgiem $x = \cos t$, $y = \sin t$ dla $0 \leq t \leq 2\pi$;
- 2) $\int_L y dx + x^2 dy$, gdzie L jest $x = 2t$, $y = t^2 - 1$ dla $0 \leq t \leq 2$;
- 3) $\int_L y dx + (x + 2y) dy$, gdzie L jest odcinkiem od punktu $(3, 0)$ do punktu $(0, 1)$;
- 4) $\int_L x^2 y dx + 3y dy$, gdzie L jest odcinkiem od punktu $(0, -2)$ do punktu $(0, 1)$;
- 5) $\int_L 2x dx + (x - 3y) dy$, gdzie L jest sumą odcinków od punktu $(0, 1)$ do punktu $(0, 0)$, a następnie do punktu $(2, 0)$;
- 6) $\int_L y^3 dx + x^3 dy$, gdzie L jest sumą odcinków od punktu $(-4, 1)$ do punktu $(-4, -2)$, a następnie do punktu $(2, -2)$;
- 7) $\int_L 2x dx$, gdzie L jest częścią paraboli $y = x^2$ od punktu $(-1, 1)$ do punktu $(3, 9)$.

6.2.2 Zastosowanie całki krzywoliniowej skierowanej

Obliczyć jaką pracę wykona siła \vec{F} wzdłuż krzywej L :

- 1) $\vec{F} = (x^2 - 2y)\vec{i} + (y^2 - 2x)\vec{j}$, gdzie L jest odcinkiem prostej od punktu $M(-4, 0)$ do punktu $N(0, 2)$;
- 2) $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$, gdzie L jest krzywą $y = x^2$, od punktu $M(-1, 1)$ do punktu $N(1, 1)$;
- 3) $\vec{F} = (x^3 - y^3)\vec{i} + xy^2\vec{j}$, gdzie L jest krzywą $x = t^2$, $y = t^3$ dla $-1 \leq t \leq 0$;
- 4) $\vec{F} = y\vec{i} + (3x + 1)\vec{j}$, gdzie L jest krzywą $x = 10 \cos t$, $y = 10 \sin t$ dla $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$;
- 5) $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$, gdzie L jest krzywą $x = 3 \cos t$, $y = 5 \sin t$ dla $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;
- 6) $\vec{F} = x\vec{i} + (x + y)\vec{j}$, gdzie L jest krzywą $x = \ln t$, $y = t$ dla $1 \leq t \leq e$;
- 7) $\vec{F} = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}\vec{i} + x\vec{j}$, gdzie L jest krzywą $y = x^2$ od punktu $(0, 0)$ do punktu $(1, 1)$;
- 8) $\vec{F} = 2xy\vec{i} - x^2\vec{j}$, gdzie L jest krzywą $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$ od punktu $(0, 0)$ do punktu $(2, 1)$, następnie od tego punktu po odcinku do punktu $(0, 1)$ i następnie po odcinku do punktu $(0, 0)$;
- 9) $\vec{F} = 2xy\vec{i}$, gdzie L jest łamaną zamkniętą o wierzchołkach w punktach $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 1)$, $(0, 0)$.

6.2.3 Twierdzenie Greena

Stosując twierdzenie Greena obliczyć następujące całki krzywoliniowe po wymienionych krzywych zorientowanych dodatnio:

- 1) $\oint_L (x - 2y) dx + 2xy dy$ po brzegu L trójkąta o wierzchołkach $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$;
- 2) $\oint_L (y - x^2 y) dx + (xy^2 + x) dy$, gdzie L jest brzegiem kwadratu $K = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$;
- 3) $\oint_L (x^2 + y^2) dx + \frac{(x + y)^2}{2} dy$ po brzegu L trójkąta o wierzchołkach $(2, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 1)$;

4) $\oint_L x^2 y dx - xy^2 dy$, gdzie L jest okręgiem $x^2 + y^2 = 4$;

5) $\oint_L (x + y) dx + xy dy$, gdzie L jest brzegiem ćwiartki koła $x^2 + y^2 \leq 4$ dla $x \geq 0, y \geq 0$;

6) $\oint_L (x^2 + 4xy) dx + (2x^2 + 3y) dy$, gdzie L jest elipsą $9x^2 + 16y^2 = 144$;

7) $\oint_L 2y dx + (y - x) dy$, gdzie L jest brzegiem półkoła $x^2 + y^2 \leq 25$ dla $y \geq 0$;

8) $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dx + (xy^2 + y \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})) dy$, gdzie L jest brzegiem obszaru ograniczonego krzywymi.