Lista zadań Nr 7

Całka powierzchniowa

7.1 Całka powierzchniowa niezorientowana

7.1.1 Obliczanie całki powierzchniowej niezorientowanej

Obliczyć całki powierzchniowe niezorientowane:

1) $\iint\limits_S (6xyz+1)\,dS$, gdzie S jest częścią płaszczyzny $z=1-x-y$ spełniającą warunki $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;

2) $\iint\limits_S (x^2+y^2+z)\,dS$, gdzie S jest częścią płaszczyzny $z=x+y+1$ spełniającą warunki $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$;

3) $\iint\limits_S (x+y)\,dS$, gdzie S jest częścią walca $z=\sqrt{4-x^2}$, dla której $0 \leq x \leq \sqrt{3}$, $0 \leq y \leq 1$;

4) $\iint\limits_S (x^2+y^2)z\,dS$, gdzie S jest częścią sfery $x^2+y^2+z^2=25$ leżącą nad płaszczyzną $z=3$.

7.1.2 Zastosowanie całki powierzchniowej niezorientowanej

1. Obliczyć masę powierzchni o danej gęstości:

   1) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ o gęstości $\rho(x,\,y,\,z)=|y|$;
   2) trójkąta o wierzchołkach $(2,\,0,\,0)$, $(0,\,2,\,0)$, $(0,\,0,\,2)$ o gęstości $rho(x,\,y,\,z)=x^2$;
   3) $z=xy$ leżącej wewnątrz walca $x^2+y^2=1$, której gęstość wynosi 3 w każdym punkcie.

2. Obliczyć moment statyczny względem płaszczyzny Oyz trójkątnej płytki o wierzchołkach $(1,\,0,\,0)$, $\left(0,\,\frac{1}{2},\,0\right)$, $(0,\,0,\,1)$. Gęstość materiału w danym punkcie równa jest sumie jego współrzędnych.

3. Znaleźć moment bezwładności względem osi Oy części płaszczyzny $z=x$, gdzie $x \geq 0$, $y \geq 1$, $x+y \leq 2$. Gęstość powierzchni w każdym punkcie równa jest jego odległości od osi Oy.

4. Obliczyć moment statyczny względem płaszczyzny Oxz części powierzchni $z=\sqrt{25-y^2}$ dla $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 4$.

5. Obliczyć moment bezwładności względem osi Oz półsfery $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 1$

6. Znaleźć środek ciężkości części stożka $4z^2=x^2+y^2$ spełniającej nierówność $1 \leq z \leq 4$. Rozważyć przypadki gdy gęstość materiału jest a) stała, b) proporcjonalna do odległości punktu od płaszczyzny Oxy, c) proporcjonalna do odległości punktu od środka układu współrzędnych.

7. Obliczyć moment bezwładności względem płaszczyzny Oxy części sfery $x^2+y^2+z^2=16$ dla $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

7.2 Całka powierzchniowa zorientowana

7.2.1 Obliczanie całki powierzchniowej zorientowanej

1. Obliczyć całki powierzchniowe zorientowane:

   1) $\iint\limits_S yz\,dydz + xz\,dxdz + xy\,dxdy$, gdzie S jest górną stroną części płaszczyzny $x + y + z = 2$ spełniającej warunki $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;

   2) $\iint\limits_S z\,dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;

   2) $\iint\limits_S 4y^2\,dydz + 3x\,dxdz + 2z\,dxdy$, gdzie S jest górną stroną płata $z = xy$ dla $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$.

2. Obliczyć strumień pola $\vec{v}$ przez podaną powierzchnię S:

   1) $\vec{v} = (-y,\, x,\, 0)$, gdzie S jest górną stroną części płaszczyzny $z = 8x - 4y - 5$, która spełnia warunki $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$;

   2) $\vec{v} = (yz,\, -x,\, -y)$, gdzie S jest stroną stożka $x^2 + y^2 = z^2$ spełniającą warunek $0 \leq z \leq 1$, z której "widać" dodatnią półoś Oz;

   3) $\vec{v} = (-x,\, 2y,\, -z)$, gdzie S jest sferą $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;

   4) $\vec{v} = (-x,\, -y,\, -z)$, gdzie S jest górną stroną części paraboloidy $z = x^2 + y^2 - 4$ leżącą pod płaszczyzna Oxy.

7.2.2 Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego

Zastosować Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego do obliczenia strumienia pola $\vec{v}$ na zewnątrz powierzchni $\partial\Omega$ ograniczającej wskazaną bryłę Ω:

1) $\vec{v} = (x^2yz,\, xy^2z,\, xyz^2)$ przez powierzchnię kostki $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$;

2) $\vec{v} = (z,\, x,\, y)$ przez powierzchnię półkuli $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, $z \geq 0$;

3) $\vec{v} = (x^2,\, y^2,\, z^2)$ przez powierzchnię bryły między $z = 0$ oraz $z = 4 - x^2 - y^2$;

4) $\vec{v} = (y,\, y\sqrt{z},\, z\sqrt{z})$ przez powierzchnię bryły $x^2 + y^2 \leq 9$, $1 \leq z \leq 4$;

5) $\vec{v} = (xe^z,\, ye^z,\, 2e^z)$ przez powierzchnię bryły $x + y \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq 1$.

7.3 Wzory pomocnicze

Jeśli S jest powierzchnią o zmiennej gęstości $\rho(x,\, y,\, z)$ to następne wielkości obliczamy ze wzorów:

1) masa powierzchni S:

$$m = \iint\limits_S \rho(x,\, y,\, z)\, dS;$$

2) momenty statyczne powierzchni S względem płaszczyzn układu współrzędnych:

$$\text{względem płaszczyzny } Oyz\text{: } M_{yz} = \iint\limits_S x \cdot \rho(x,\, y,\, z)\, dS,$$

$$\text{względem płaszczyzny } Oxz\text{: } M_{xz} = \iint\limits_S y \cdot \rho(x,\, y,\, z)\, dS,$$

$$\text{względem płaszczyzny } Oxy\text{: } M_{xy} = \iint\limits_S z \cdot \rho(x,\, y,\, z)\, dS,$$

3) współrzędne środka ciężkości $(x_0,\, y_0,\, z_0)$ powierzchni S:

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_0 = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_0 = \frac{M_{xy}}{m},$$

4) momenty bezwładności powierzchni S względem płaszczyzn układu:

$$\text{względem płaszczyzny } Oyz\text{: } B_{yz} = \iint\limits_S x^2 \cdot \rho(x,\, y,\, z)\, dS,$$

$$\text{względem płaszczyzny } Oxz\text{: } B_{xz} = \iint\limits_S y^2 \cdot \rho(x,\, y,\, z)\, dS,$$

$$\text{względem płaszczyzny } Oxy\text{: } B_{xy} = \iint\limits_S z^2 \cdot \rho(x,\, y,\, z)\, dS,$$

5) momenty bezwładności powierzchni S względem osi układu:

$$\text{względem płaszczyzny } Ox\text{: } B_x = \iint\limits_S (y^2 + z^2) \cdot \rho(x,\, y,\, z)\, dS,$$

$$\text{względem płaszczyzny } Oy\text{: } B_y = \iint\limits_S (x^2 + z^2) \cdot \rho(x,\, y,\, z)\, dS,$$

$$\text{względem płaszczyzny } Oz\text{: } B_z = \iint\limits_S (x^2 + y^2) \cdot \rho(x,\, y,\, z)\, dS,$$

6) moment bezwładności powierzchni S względem środka układu:

$$\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \rho(x,\, y,\, z)\, dS$$