Lista zadań Nr 8

Równania różniczkowe zwyczajne

8.1 Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

Znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego:

1) $\begin{cases} yy' + 4t = 0, \\ y(0) = 4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} dy = 2ty^2 dt, \\ y(0) = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} t(y^2-1)dt + y(t^2-1)dy = 0, \\ y(0) = 2; \end{cases}$

4) $\sin y' = t;$

5) $y' - xy^2 = 2xy;$

6) $y' = \cos(y-x);$

7) $y' - y = 2x - 3;$

8) $y' = \sqrt{4x+2y-1};$

9) $y' = \sqrt{y}e^{3x};$

10) $y' \operatorname{tg} x - y = -2;$

11) $(1+x^2)y' = 2xy;$

12) $y' + (1-y^2)\operatorname{tg} x = 0.$

8.2 Równanie jednorodne rzędu pierwszego

Znaleźć rozwiązania ogólne równań jednorodnych rzędu pierwszego:

a) $(x-y)dx + (x+y)dy;$

b) $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0;$

c) $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x};$

d) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}};$

e) $xy' = y \cos \ln \frac{y}{x};$

f) $2x^3y' = y(2x^2 - y^2).$

8.3 Równanie różniczkowe liniowe rzędu pierwszego

Znaleźć rozwiązania ogólne równań różniczkowych liniowych rzędu pierwszego:

a) $xy' - 2y = 2x^4;$

b) $x(y' - y) = e^x;$

c) $y = x(y' - x\cos x);$

d) $y' = \dfrac{y}{3x - y^2};$

e) $(2e^y - x)y' = 1;$

f) $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x};$

g) $(2x+1)y' = 4x + 2y;$

h) $y' = 2x(x^2 + y).$

8.4 Równanie Bernoulli'ego

Znaleźć rozwiązania ogólne równań różniczkowych Bernoulli'ego:

a) $y' + 2y = y^2e^x;$

b) $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x;$

c) $xydy = (y^2 + x)dx;$

d) $y'x^3 \sin y = xy' - 2y;$

e) $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y;$

f) $(2x^2 y \ln y - x)y' = y.$

8.5 Równanie zupełne

Znaleźć rozwiązanie równania zupełnego:

$$1)\ 2-\left(\frac{y}{x}\right)^2+2\frac{y}{x}y'=0;$$
$$2)\ 2xy+(y^2+x^2)y'=0;$$
$$3)\ \frac{2x}{y^3}+\left(\frac{1}{y^2}-\frac{3x^2}{y^4}\right)y'=0.$$

8.6 Równanie różniczkowe rzędu pierwszego

Znaleźć nieosobliwe rozwiązania równań różniczkowych rzędu pierwszego:

1) $xy'+3y=x^5$; 2) $x+3y+xy'=0$; 3) $xy'+y+x=e^x$;
4) $y'(x-y)=x+y$; 5) $xy'+(2+3x)y=xe^{-3x}$; 6) $y+\sqrt{x^2-y^2}-xy'=0$;
7) $y'+4y=e^{-4x}$; 8) $y'+3x^2y=x^2+e^{-x^3}$; 9) $y'=y^2+1$;
10) $3x^2e^y+(x^3e^y+2)y'=0$; 11) $y^3(4y'+y)=x$; 12) $y'\cos y-x-\sin y=0$.

Odpowiedzi. **1)** $y(x)=\frac{x^5}{8}+\frac{C}{x^3}$; **2)** $y(x)=-\frac{x}{4}+\frac{C}{x^3}$; **3)** $y(x)=\frac{1}{x}\left(e^x-\frac{x^2}{2}+C\right)$; **4)** $\ln\sqrt{x^2+y^2}-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$; **5)** $y(x)=\frac{e^{-3x}x}{3}+C\frac{e^{-3x}}{x^2}$; **6)** $y(x)=x\sin(C+\ln x)$; **7)** $y(x)=e^{-4x}(C+x)$; **8)** $y(x)=\frac{1}{3}+e^{-x^3}(x+C)$; **9)** $y(x)=\operatorname{tg}x+C$; **10)** $2y+x^3e^y=C$; **11)** $(y^4+1-x)e^x=C$; **12)** $y(x)=\arcsin\left(e^xC-1-x\right)$.

8.7 Zagadnienie Cauchy'ego dla równania różniczkowego rzędu pierwszego

Rozwiązać równania różniczkowe przy podanych warunkach początkowych:

1) $\begin{cases} y-xy'=2+2x^2y', \\ y(1)=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y'=e^xe^y, \\ y(0)=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (xy'-x)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=x, \\ y(1)=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy'-y=x^2+x, \\ y(1)=2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} y'+y=\dfrac{x}{y}, \\ y(0)=1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} xy'+y+xy=e^{-x}, \\ y(1)=0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2xy^3+8x+(3x^2y^2+5)y'=0, \\ y(2)=-1; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2y^2y'=3y-y', \\ y(3)=1; \end{cases}$

9) $\begin{cases} xy'+y=e^x, \\ y(2)=3; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} y'=xy^2-xy, \\ y(0)=2; \end{cases}$

11) $\begin{cases} y'+\operatorname{Ctg}x=\sin x, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} \dfrac{y'}{\sqrt{y}}+4x\sqrt{y}=2xe^{-x^2}, \\ y(0)=3; \end{cases}$

13) $\begin{cases} \dfrac{1}{y}+\dfrac{xy'}{y^2}=0, \\ y(-2)=6; \end{cases}$ 14) $\begin{cases} y'=\cos^2x-y\operatorname{tg}x, \\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$

15) $\begin{cases} y'\sin x=y\ln y, \\ y(0)=1; \end{cases}$ 16) $\begin{cases} y=y^2\ln x-xy', \\ y(1)=1. \end{cases}$

8.8 Równania różniczkowe rzędu pierwszego nie rozwiązane względem pochodnej. Metoda wprowadzenia parametru

8.8.1 Znaleźć rozwiązania ogólne równań różniczkowych, rozwiązując je względem pochodnej:

8.8.1.1) $y'^2 - y^2 = 0$; 8.8.1.2) $(y'+1)^3 = 27(x+y)^2$;

8.8.1.3) $3y'^3 = 27y$; 8.8.1.4) $xy'(xy'+y) = 2y^2$;

8.8.1.5) $y'^2 + x = 2y$; 8.8.1.6) $y'^2 - 2yy' = y^2(e^x - 1)$.

8.8.2 Rozwiązać równania różniczkowe metodą wprowadzenia parametru:

8.8.2.1) $x = y'^3 + y'$; 8.8.2.2) $y = (y'-1)\ln y'$;

8.8.2.3) $y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y$; 8.8.2.4) $2xy' - y = y'\ln yy'$;

8.8.2.5) $y = xy' - x^2y'^3$; 8.8.2.6) $xy' - y = \ln y'$.

Odpowiedzi. **1)** $\begin{cases} x = p^3 + p, \\ y = 3/4p^4 + 1/2p^2 + C; \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x = 1/2\ln^2 p + \ln p + 1/p + C, \\ y = (p-1)\ln p; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = c - p, \\ y = 1/4((c-p)^2 + 2p(c-p) - p^2); \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x = 1/2(C/p^2 + \ln C), \\ y = C/p; \end{cases}$

5) $\begin{cases} xp^2 = C\sqrt{|p|} - 1, \\ y = 1/p(C\sqrt{|p|} - 1 - (C\sqrt{|p|} - 1)^2); \end{cases}$ **6)** $y = Cx - \ln C$, $y = \ln x + 1$.

8.9 Równania różniczkowe rzędów wyższych

Znaleźć rozwiązania ogólne równań różniczkowych rzędów wyższych:

a) $x^2y'' = y'^2$; *b)* $y^3y'' = 1$;
c) $y''(e^x + 1) + y' = 0$; *d)* $yy'' = y'^2 - y'^3$;
e) $x^2y''' = y''^2$; *f)* $y'' = e^y$;
g) $y'^2 = (3y - 2y')y''$; *h)* $xy'' = y' + x\sin\frac{y'}{x}$;
i) $xyy'' - xy'^2 = yy'$; *j)* $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$;
k) $(x^2+1)(y'^2 - yy'') = xyy'$; *l)* $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$;
m) $x^2yy'' = (y - xy')^2$; *n)* $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{y'^2}{y}$.

Odpowiedzi. **a)** $C_1x - C_1^2y = \ln|C_1x+1| + C_2$, $2y = x^2 + C$, $y = C$; **b)** $C_1y^2 - 1 = (C_1x + C_2)^2$; **c)** $y = C_1(x - e^{-x}) + C_2$; **d)** $y + C_1\ln|y| = x + C_2$, $y = C$; **e)** $2y = C_1x^2 - 2C_1^2(x + C_1)\ln|x + C_1| + C_2x + C_3$; **f)** $e^y\sin^2(C_1x + C_2) = 2C_1^2$, $e^y\,\mathrm{sh}^2(C_1x + C_2) = 2C_1^2$, $e^y(x+C)^2 = 2$; **g)** $x = 3C_1p^2 + \ln C_2p$, $y = 2C_1p^3 + p$; $y = C$; **h)** $C_1^2y = (C_1^2x^2 + 1)\,\mathrm{arctg}\, C_1x$ $-C_1x + C_2$ $2y = k\pi x^2 + C$, $k = 0, \pm1, \pm2\ldots$; **i)** $y = C_2e^{C_1x^2}$; **j)** $\ln C_2y = 4x^{5/2} + C_1x$, $y = 0$; **k)** $y = C_2(x + \sqrt{x^2+1})^{C_1}$; **l)** $y^2 = C_1x^3 + C_2$; **m)** $y = C_2xe^{-C_1/x}$; **n)** $y = C_2|x|^{C_1 - \frac{1}{2}\ln|x|}$.

8.10 Zagadnienie Cauchy'ego

Znaleźć rozwiązania równań różniczkowych spełniających warunki początkowe:

a) $yy'' = 2xy'^2;\ \ y(2) = 2,\ y'(2) = 0,5;$
b) $2y''' - 3y''^2 = 0;\ \ y(0) = -3,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1;$
c) $y''' = 3yy';\ \ y(0) = -2,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 4,5;$
d) $y'' \cos y + y'^2 \sin y = y';\ \ y(-1) = \frac{\pi}{6},\ y'(-1) = 2.$

e) $\begin{cases} x^2y' + y^2 = 0, \\ y(-1) = 1; \end{cases}$

f) $\begin{cases} y' = \dfrac{2y+1}{\operatorname{tg} x} \\ y(\pi/4) = 1/2; \end{cases}$

8.11 Równania i układy równań liniowych o stałych współczynnikach

8.11.1 Równania liniowe jednorodne o stałych współczynnikach:

Znaleźć rozwiązania ogólne równań liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach:

a) $y'' + y' - 2y = 0;$ *b)* $y'' - 2y' = 0;$
c) $y'' - 4y' + 5y = 0;$ *d)* $y'' + 4y = 0;$
e) $y^{IV} - y = 0;$ *f)* $y^{IV} + 64y = 0;$
g) $4y'' + 4y' + y = 0;$ *h)* $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0;$
i) $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0;$ *j)* $y'' - 3y' + 2y = 0;$
k) $y'' - 2y' + y = 0;$ *l)* $y^{IV} + 2y'' + y = 0;$
m) $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0;$ *n)* $y''' - y'' - y' + y = 0.$

8.11.2 Metoda przewidywań dla równań liniowych

Metodą przewidywań znaleźć rozwiązania ogólne równań liniowych niejednorodnych o stałych współczynnikach:

a) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x};$ *b)* $y'' - y = 2e^x - x^2;$
c) $y'' - 3y' + 2y = \sin x;$ *d)* $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x};$
e) $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x};$ *f)* $y'' + 2y' - 3y = x^2e^x;$
g) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x;$ *h)* $y'' - 9y = e^{3x} \cos x;$
i) $y'' + y = x \sin x;$ *j)* $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x;$
k) $y'' + y = 4xe^x;$ *l)* $y'' + y' - 2y = 3xe^x;$
m) $y'' - 2y' + y = 6xe^x;$ *n)* $y''3 - y' + 2y = x \cos x;$
o) $y'' - 3y' + 2y = \sin x \sin 2x;$ *p)* $y'' - 4y' + 4y = e^{-x};$
r) $y'' + y = \sin x - 2e^{-x};$ *s)* $y'' - 4y' + 4y = \sin^3 x.$

8.11.3 Metoda uzmienniania stałych dla równań liniowych

Metodą uzmienniania stałych znaleźć rozwiązania ogólne równań liniowych niejednorodnych o stałych współczynnikach:

a) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x};$ *b)* $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1};$
c) $y'' + y = \frac{1}{\sin x};$ *d)* $y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x;$
e) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x} + \sqrt{x+1}.$

8.11.4 Zagadnienie Cauchye'go dla równań liniowych

Znaleźć rozwiązania zagadnień Cauchye'go:

1. $y''' - y' = 0;\ \ y(0) = 3,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1;$
2. $y'' - 2y' + y = 0;\ \ y(2) = 1,\ y'(2) = -2;$
3. $y'' + y = 4e^x;\ \ y(0) = 4,\ y'(0) = -3;$
4. $y'' - 2y' = 2e^x;\ \ y(1) = -1,\ y'(1) = 0;$
5. $\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 0, \\ y(0) = 6,\ y'(0) = 10; \end{cases}$

6. $\begin{cases} y'' - y' = 2(1-x), \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3}{2}x}, \\ y(0) = 3,\ y'(0) = 5,5. \end{cases}$

8. $\begin{cases} y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3,2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} y'' + 4y' + 29y = 0, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 15. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4y'' + 4y' + y = 0, \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0. \end{cases}$

8.11.5 Równania Eulera

Znaleźć rozwiązania równań Eulera:

$a)$ $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$; $b)$ $x^2y'' - xy' - 3y = 0$;
$c)$ $x^3y''' + xy' - y = 0$; $d)$ $x^2y'' - xy' + y = 8x^3$;
$e)$ $x^3y'' - 2xy = 6\ln x$; $f)$ $(x-2)^2y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$.

8.11.6 Układy równań jednorodnych o stałych współczynnikach

Znaleźć rozwiązania układów równań jednorodnych o stałych współczynnikach:

$a)\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y; \end{cases}$ $b)\begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0; \end{cases}$

$c)\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y; \end{cases}$ $d)\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4y - x; \end{cases}$

$e)\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x, \\ \dot{y} = y - 2x; \end{cases}$ $f)\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y; \end{cases}$

$g)\begin{cases} \dot{x} = x + z - y, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y; \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1)$

$h)\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = 2y + 3z - x; \end{cases}$ $(\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = 3 \pm i)$

$j)\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y, \\ \dot{y} = x + 2z, \\ \dot{z} = y - 2x - z; \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \pm i)$

$k)\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z, \\ \dot{z} = 2z - x + y; \end{cases}$ $(\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1)$

$l)\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z, \\ \dot{z} = 2x - 4y; \end{cases}$ $(\lambda_1 = -5,\ \lambda_{2,3} = 2)$

$m)\begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x, \\ \dot{y} = 4x + y, \\ \dot{z} = 2x + y - z; \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1)$

$n)\begin{cases} \dot{x} = y - 7x, \\ \dot{y} + 2x + 5y = 0. \end{cases}$

8.11.7 Układy równań niejednorodnych

Znaleźć rozwiązania układów równań niejednorodnych o stałych współczynnikach:

$a)\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2; \end{cases}$ $b)\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y; \end{cases}$

$c)\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y; \end{cases}$ $d)\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y + e^{-2t}, \\ \dot{y} = x - 2y - 3e^{-2t}; \end{cases}$

$e)\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t; \end{cases}$ $f)\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}; \end{cases}$